УДК 532.70+535.211

ВЛИЯНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ФРОНТА ИСПАРЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОВЕРХНОСТНОГО ИСТОЧНИКА НАГРЕВА

И. Н. Карташов, В. И. Мажукин, В. В. Перебейнос, А. А. Самохин

Получено дисперсионное уравнение для возмущения плоского фронта испарения в диапазоне изменения числа Маха M в потоке пара от нуля до единицы. При $M << 1$ и постоянстве температуры в конденсированной среде это уравнение переходит в уравнение Даррье – Ландау, а при стремлении числа Маха к единице и экстремальности потоков массы g_1, импульса g_2 и энергии g_3 в этой точке получается рассмотренное ранее уравнение [1], в котором газодинамические эффекты не проявляются.

Как известно, поверхность конденсированной среды, испаряемой под действием интенсивного источника нагрева, оказывается, вообще говоря, морфологически неустойчивой (см., напр., [1 – 3]). К этой проблеме примыкает и задача Даррье – Ландау [4] о неустойчивости фронта медленного горения, определяющую роль в развитии которой играют газодинамические эффекты в потоке продуктов горения. Настоящая работа посвящена исследованию влияния газодинамических возмущений в дозвуковом потоке пара на устойчивость плоского фронта испарения.

Поведение испаряемой поверхностным источником нагрева конденсированной фазы в рассматриваемой задаче описывается уравнениями теплопроводности и Эйлера для несжимаемой жидкости с постоянными температуропроводностью χ и теплоемкостью c, на поверхности которой формулируются соответствующие граничные условия [5].

В случае невозмущенной плоской границы раздела, движущейся в отрицательном направлении оси z со скоростью $v = g_1/\rho_l$ по неподвижной жидкости с плотностью ρ_l, профиль температуры в системе отсчета, связанной с фронтом испарения, определяется известным выражением: $T_l = \Delta T[\exp(k_0 z) - 1] + T_s$, где $\Delta T = T_s - T_\infty$, T_s и T_∞ – соответственно температура на поверхности ($z = 0$) и в глубине конденсированной среды, а $k_0 = v/\chi$.

Предполагая, что возмущения всех физических параметров на фронте испарения пропорциональны $\exp(\omega t - ikx)$, линеаризованные граничные условия можно записать в следующем виде:

$$\delta v_z = \omega\xi + \delta g_1/\rho_l,$$

$$\delta p_l = \delta g_2 - 2v\delta g_1 + \alpha k^2\xi, \quad z = 0 \tag{1}$$

$$\delta(g_1 L_{ne}) + c\rho_l\chi\left(\frac{\partial\delta T_l}{\partial z} + \xi\frac{\partial^2 T_l}{\partial z^2}\right) = 0,$$

где неравновесная теплота перехода $L_{ne} = L(T_s) + c_p(T - T_s) + (u^2 - v^2)/2 = L(T_s) + g_3/g_1 - c_pT_s - v^2/2$ (последним членом в дальнейшем будем пренебрегать). Соотношения (1) следуют из законов сохранения на поверхности раздела для потоков массы $g_1 = \rho u$, импульса g_2 и энергии g_3, которые считаются зависящими от T_s и M.

С учетом смещения ξ возмущенной поверхности раздела относительно $z = 0$ и соответствующей связи $\delta T_s = \delta T_l(0) + \xi\partial T_l/\partial z$ между возмущением температуры поверхности δT_s и величиной $\delta T_l(0)$, решение рассматриваемой системы гидродинамических уравнений может быть представлено в виде:

$$\delta v_z = \delta v e^{kz}, \ \delta v_x = -i\delta v e^{kz}, \ \delta p_l = -\frac{\rho_l}{k}(\omega + kv)\delta v e^{kz}, \tag{2}$$

$$\delta T_l = \frac{k_0\Delta T\delta v}{\omega - kv}(e^{qz} - e^{(k+k_0)z}) + (\delta T_s - \xi k_0\Delta T)e^{qz}, \quad z \le 0$$

где q удовлетворяет уравнению $q^2 - qk_0 - k^2 - \omega/\chi = 0$ с условием $\mathrm{Re}\, q > 0$.

Записанная система (1), (2) формально совпадает по виду с рассмотренной ранее [1] за тем исключением, что величины δg_1, δg_2 и δL_{ne} теперь зависят также от величины δM, которая определяется из решения системы (1), (2) совместно с внешней газодинамической задачей для потока испаренного вещества.

Движение потока пара, который считается идеальным одноатомным газом (с показателем адиабаты $\gamma = c_p/c_v = 5/3$), описывается системой газодинамических уравнений неразрывности, Эйлера и адиабатичности, невозмущенным решением которой являются постоянные значения плотности пара ρ, давления p, компонент скорости $u_z = u = g_1/\rho$, $u_x = 0$ и числа Маха $M = u/u_c$, где скорость звука $u_c^2 = \gamma p/\rho$.

Граничные условия и объемные решения для линеаризованной внешней задачи имеют вид:

$$\delta p=\delta(g_2-g_1u),\ \delta u_z=\omega\xi+\delta u,\ \delta u_x=\delta v_x+ik(u-v)\xi, \tag{3}$$

$$\delta p=\sum_{i=1,2}A_ie^{-k_iz},\quad \delta\rho=\frac{\delta p}{c_g^2}+A_3e^{-k_3z},$$

$$\delta u_z=\sum_{i=1,2}A_i\frac{k_i}{\rho(\omega-k_iu)}e^{-k_iz}+\frac{ku}{\omega}A_4e^{-k_3z},\quad z\geq 0 \tag{4}$$

$$\delta u_x=\sum_{i=1,2}\frac{ik}{\rho(\omega-k_iu)}A_ie^{-k_iz}+iA_4e^{-k_3z},$$

где волновые числа k_i с $i=1,2$ и k_3 определяются соотношениями:

$$k_3=\omega/u,\ (u_c^2-u^2)k_i^2+2k_i\omega u-\omega^2-k^2u_c^2=0. \tag{5}$$

Из условия отсутствия возмущений, идущих от бесконечности к границе раздела, следует, что $A_2=0$ в диапазоне $M\leq 1$. Напомним, что в одномерной задаче [6] об отклике испарительного процесса на модуляцию температуры поверхности условие $A_2=0$ непосредственно приводит к связи между δM и δT_s. В итоге из соотношений (1) – (5) получаем однородную систему уравнений относительно величин δv, ξ, δT_s и δM:

$$\delta v-\omega\xi=\delta g_1/\rho_l, \tag{6}$$

$$\delta v\rho_l(v+\omega/k)+\alpha k^2\xi=-\delta g_2+2v\delta g_1,$$

$$\delta(g_1L_{ne})+c\rho_l\chi\left(\frac{k_0\Delta T\delta v}{\omega-kv}(q-k-k_0)+q\delta T_s+\xi k_0\Delta T(k_0-q)\right)=0,$$

$$\delta u_x=\frac{i\omega}{ku}(\omega\xi+\delta u)-\frac{i\delta(g_2-g_1u)}{\rho u}F=-i\delta v+ik(u-v)\xi,$$

где

$$\delta\ln g_1=(\bar p'_s-0,5)\delta\ln T_s+\bar g'_1\delta\ln M,\quad \bar g'_1=1+\bar p'-0,5\bar T',$$

$$\delta\ln g_2=\bar p'_s\delta\ln T_s+\bar g'_2\delta\ln M,\quad \delta\ln L_{ne}=\bar L'_s\delta\ln T_s+\bar L'\delta\ln M,$$

$$\bar g'_2=\left(\bar p'+\frac{2\gamma M^2}{1+\gamma M^2}\right),\quad \bar L'=\frac{c_pT}{L_{ne}}\left(\bar T'+\frac{2M^2}{3}\left(1+\frac{\bar T'}{2}\right)\right),$$

$$\delta\ln u=0,5\delta\ln T_s+(1+0,5\bar T')\delta\ln M,\quad F=\frac{k_1\omega-k^2u}{k(\omega-k_1u)}. \tag{7}$$

Здесь использовались обозначения $\bar H'_s=\partial\ln H/\partial\ln T_s$, $\bar H'=\partial\ln H/\partial\ln M$, где $H(T_s,M)$ – произвольная функция двух аргументов.

Условием разрешимости однородной системы уравнений (6) является равенство нулю соответствующего определителя, что дает искомое дисперсионное уравнение для $\omega(k)$, явный вид которого приводится здесь для простоты в случае $\Delta T = 0$ и $v << u$:

$$f(\omega,k) + \frac{\delta \ln M}{\xi}\frac{\delta \ln T_s}{\delta \ln M}\left[(\bar{p}'_s - 0,5)u(\omega + kv) + \frac{k}{\rho_l}g_2\bar{p}'_s\right] +$$

$$+\frac{\delta \ln M}{\xi}\left[\frac{k}{\rho_l}g_2\bar{g}'_2 + \bar{g}'_1 u(\omega + kv)\right] = 0, \qquad (8)$$

где

$$f(\omega,k) = \omega^2 + \omega k v + \alpha k^3/\rho_l,$$

$$\frac{\delta \ln T_s}{\delta \ln M} = -\frac{g_1(L_{ne}\bar{g}'_1 + \bar{L}')}{qT_s c\rho_l\chi + g_1[L_{ne} - L(T_s) + (\bar{p}'_s - 0,5)L_{ne}]},$$

а величина $\delta \ln(M/\xi)$ определяется из соотношения

$$\frac{\omega^2}{ku} + \omega - ku + \frac{\delta \ln M}{\xi}\frac{\delta \ln T_s}{\delta \ln M}\left[-p\frac{\bar{p}'_s}{g_1}F + u\left(\bar{p}'_s - \frac{1}{2}\right) + \frac{\omega}{2k}\right] +$$

$$+\frac{\delta \ln M}{\xi}\left[-p\frac{\bar{p}'}{g_1}F + \frac{\omega}{k}\left(1 + \frac{\bar{T}'}{2}\right) + u\bar{g}'_1\right] = 0. \qquad (9)$$

В пределе малых чисел Маха $M << 1$ величина F из (7) и отношение g_2/p стремятся к единице, а отношение множителей при $\delta \ln M$ в уравнениях (8), (9) оказывается равным $-kv$. В этом пределе дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega^2 + 2\omega k v + \alpha k^3/\rho_l - k^2 uv = 0,$$

который с точностью до отброшенных членов v/u совпадает с уравнением Дарье – Ландау [4].

В пределе $M \to 1$ и условии экстремальности потоков в этой точке, где $\bar{T}' = -1/2$, $\bar{p}' = -5/4$, вклад от $\delta \ln M$ в уравнении (8) обращается в нуль, и при условии $\Delta T = 0$ дисперсионное уравнение совпадает с уравнением $f(\omega,k) = 0$ для капиллярных волн с протоком вещества через границу.

В этом же пределе аналогичное расцепление происходит и в случае $\Delta T \neq 0$, поскольку из первых трех уравнений (6) выпадает зависимость от δM, то есть задача для конденсированной среды становится замкнутой и сводится к рассмотренной ранее [1, 3]. При этом величина $\delta M \neq 0$ и остальные параметры определяются уравнениями (6) и (3), в которых правые части уже считаются известными.

Этот результат при рассмотрении аналогичной задачи в работе [2] не был получен, в частности, из-за недостаточно последовательного подхода к формулировке испарительных граничных условий. Более подробный анализ полученного здесь дисперсионного уравнения будет рассмотрен в отдельной работе.

Отметим в заключение, что газодинамические эффекты при $M < 1$ модифицируют также отклик испарительного процесса на модуляцию интенсивности нагрева по сравнению со случаем $M = 1$, который рассматривался ранее в [3, 7]. Описанное в [3, 7] резонансное по отношению к частоте модуляции поведение отклика становится при $M < 1$ более выраженным, а при стремлении M к 1 влияние газодинамических эффектов на испарительный процесс ослабевает.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Самохин А. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 8, 26 (1980); N 6, 8 (1981); N 5, 3 (1985).

[2] Левченко Е. Б., Черняков А. Л. ПМТФ, N 6, 144 (1982).

[3] Самохин А. А. Труды ИОФАН, **13**, 3 (1988).

[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., Наука, 1988.

[5] Мажукин В. И., Прудковский П. А., Самохин А. А. Математическое моделирование, **5**, N 6, 3 (1993).

[6] Карташов И. Н., Мажукин В. И., Перебейнос В. В., Самохин А. А. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 7-8, 50 (1995).

[7] Samokhin A. A., Gus'kov A. P. Phys. Lett., **A77**, 344 (1980).

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 24 июня 1996 г.